

## POMIARY REZYSTANCJI

---

### Cel ćwiczenia

---

Celem ćwiczenia jest poznanie typowych metod pomiaru rezystancji elementów liniowych i nieliniowych o wartościach od pojedynczych omów do kilku megaomów, warunków decydujących o doborze układu pomiarowego oraz poznanie źródeł błędów w tych pomiarach.

### Program ćwiczenia

---

#### 1. Bezpośrednie pomiary rezystancji elementów omomierzem cyfrowym

1.1. Zmierzyć wartość rezystancji kilku wybranych elementów, dobierając optymalnie zakres omomierza. Obliczyć błędy graniczne pomiarów, zapisać wyniki z uwzględnieniem przedziałów niepewności. Pomiary powtórzyć zmieniając zakres pomiarowy omomierza.

#### 2. Pośrednie pomiary rezystancji elementu liniowego

2.1. Dla rezystorów zmierzonych w pkt 1.1 dobrać wartość napięcia i prądu, biorąc pod uwagę moc opornika oraz wyposażenie stanowiska. Wybrać układ pomiarowy, w którym błąd systematyczny jest mniejszy (układ poprawnego pomiaru prądu- rys.1 lub poprawnego pomiaru napięcia – rys.2).

2.2. Zmontować wybrany układ pomiarowy, zmierzyć prąd i napięcie w układzie pomiarowym. Obliczyć wartości mierzonych rezystancji, dla każdego pomiaru określić błąd graniczny i systematyczny (błąd metody), podać wynik pomiaru.

2.3. Dla jednego rezystora powtórzyć pomiary w innym układzie pomiarowym. Obliczyć wartość zmierzonej rezystancji, określić błąd graniczny pomiaru i systematyczny (błąd metody), , zapisać wynik pomiaru i porównać go z wynikiem uzyskanym w pkt 2.2.

2.4. Zaprojektować układ do pomiaru rezystancji jednego z rezystorów metodą porównania spadków napięć (rys.3) – dobrać rezystor wzorcowy  $R_N$  oraz woltomierze. Zmierzyć wartość rezystancji wybranego rezystora. Obliczyć wartość mierzonej rezystancji, oszacować błąd metody i określić błąd graniczny pomiaru. Zapisać wynik końcowy i porównać go z wynikami uzyskanym poprzednio.

#### 3. Pomiary rezystancji wewnętrznej woltomierza

3.1. Zmierzyć prąd jaki płynie przez woltomierz analogowy dla kilku jego wskazań na wybranym zakresie pomiarowym (rys. 4). Obliczyć rezystancję woltomierza  $R_V$  oraz błąd graniczny pomiaru.

3.2. Zmierzyć rezystancję wybranego woltomierza metodą porównania napięć w układzie jak na rys.5. Pomiary napięcia wykonać dla kilku wartości rezystancji rezystora wzorcowego  $R_N$  , przy stałej wartości  $E$ . Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów obliczyć rezystancję woltomierza i błąd pomiaru. Przedyskutować sposób minimalizacji tego błędu

#### 4. Pomiary rezystancji wewnętrznej amperomierza

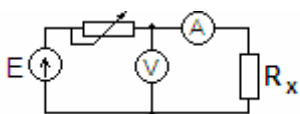
4.1. Zmierzyć spadek napięcia na amperomierzu dla kilku jego wskazań (rys.6). Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów obliczyć rezystancję amperomierza  $R_A$  i błąd graniczny pomiaru.

## 5. Pomiary rezystancji elementu nieliniowego

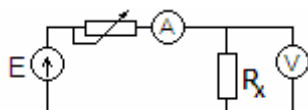
5.1. Wykonać pomiary charakterystyki prądowo-napięciowej wybranego elementu nieliniowego. Wyznaczyć rezystancję statyczną i dynamiczną tego elementu w kilku punktach charakterystyki.

## Układy pomiarowe

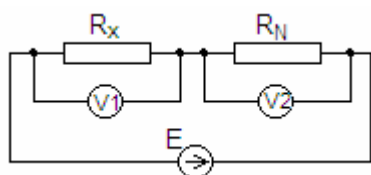
---



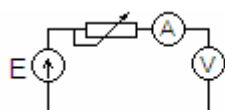
Rys.1 Układ poprawnego pomiaru prądu ( $I_A = I_{R_x}$ )



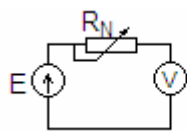
Rys.2 Układ poprawnego pomiaru napięcia ( $U_V = U_{R_x}$ )



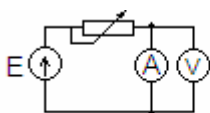
Rys.3 Układ pomiaru  $R_x$  metodą porównania spadków napięć.



Rys.4 Układ pomiaru rezystancji woltomierza  $R_V$  metodą bezpośredniego pomiaru prądu płynącego przez woltomierz.



Rys.5 Układ do pomiaru rezystancji woltomierza  $R_V$  metodą porównania spadków napięć (pośredniego pomiaru prądu).



Rys.6 Układ pomiaru rezystancji amperomierza  $R_A$ .

## Uwagi do wykonania ćwiczenia

---

We wszystkich pomiarach pośrednich, przed włączeniem zasilania należy przeliczyć dopuszczalne wartości natężenia prądu i napięcia zasilania określonej mocą elementu:  $I_{max} = \sqrt{P/R}$  ( $P$  jest maksymalną mocą elementu,  $R$  jego rezystancją). Przy doborze napięcia na rezystancji elementu liniowego (prądu płynącego przez element) kierować się dopuszczalnymi wartościami  $U$  ( $I$ ), a pomiary wykonywać dla napięć granicach  $0,1-0,3 U_{max}$  ( $I_{max}$ ) oraz **zakresami przyrządów; tak aby błąd graniczny pochodzący z niedokładności wskazań woltomierza i amperomierza był możliwie mały**. W pomiarach wg punktów 3 lub 4 wskazana jest możliwie szeroka analiza wpływu warunków pomiarów na wyniki końcowe.

Należy wykonać pomiary rezystancji woltomierzy i amperomierzy stosowanych w pomiarach, aby było możliwe dokładne wyznaczenie błędów metody. Odnosi się to szczególnie do tych przyrządów, dla których nie są podane wartości rezystancji wewnętrznej.

## Wprowadzenie

---

Rezystancja jest parametrem elementu lub obiektu charakteryzującym straty energii w tym obiekcie przy przepływie prądu. W obwodzie prądu stałego rezystancja elementu zgodnie z prawem Ohma, jest równa stosunkowi napięcia  $U$  na jego końcówkach do przepływającego prądu  $I$ .

$$R[\Omega] = \frac{U[V]}{I[A]}$$

W obwodzie zmiennoprądowym rezystancja strat jest określona jako składowa czynna impedancji. Program ćwiczenia ograniczony jest do pomiaru rezystancji przy prądzie stałym.

Elementy rezystancyjne nazywane są elementami biernymi (nie zawierają źródeł energii) i podczas pomiaru muszą być włączone w obwód elektryczny zawierający źródło napięcia lub prądu. Elementy rezystancyjne można podzielić na liniowe i nieliniowe. Rezystancja elementu nieliniowego zależy od wartości prądu  $I$ , dlatego dla elementu nieliniowego wykonuje się pomiary charakterystyki prądowo-napięciowej, z której oblicza się rezystancję w określonym punkcie pracy. Rezystancję w określonym punkcie pracy, obliczoną z prawa Ohma, nazywa się rezystancją statyczną, a zmianę rezystancji wraz ze zmianą wartości napięcia (prądu) charakteryzuje rezystancja dynamiczna  $R_d = \theta U / \theta I$ , gdzie  $\theta U$  jest zmianą napięcia na elemencie spowodowaną zmianą prądu o wartość  $\theta I$ .

Do pomiaru rezystancji przy prądzie stałym stosowane są najczęściej metody :

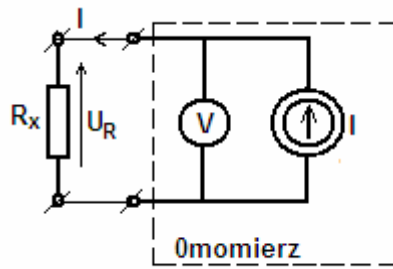
- bezpośrednia (omomierze),
- pośrednia (określenie  $R$  na podstawie znajomości napięcia i prądu płynącego przez element)
- zerowa (wyznaczenie wartości rezystancji metodą porównania z wzorcami rezystancji np. pomiar rezystancji mostkiem Wheatstone'a, mostkiem Thomsona).

### Pomiary bezpośrednie.

Do bezpośredniego pomiaru rezystancji stosuje się omomierze, czyli przyrządy, których wskazanie odpowiada wprost wartości mierzonej rezystancji. Ponieważ elementy rezystancyjne są elementami biernym, omomierz musi mieć wbudowane źródło prądu lub napięcia o stałej, znanej wartości. Zgodnie z prawem Ohma :

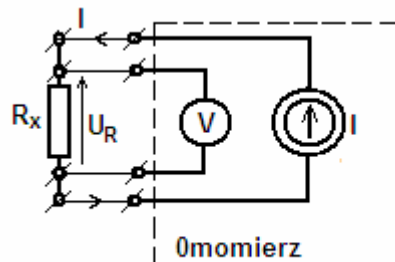
- jeśli w obwodzie prąd ma stałą wartość to napięcie na rezystorze zależy tylko od wartości rezystora  $R_x$ , (obwód powszechnie stosowany we współczesnych multimetrach),
- jeśli napięcie w obwodzie jest stałe, to prąd płynący zależy tylko od wartości rezystancji  $R$ , amperomierz mierzący ten prąd może być wyskalowany w omach (zasada pomiaru powszechnie stosowana w starszych multimetrach).

W uniwersalnych miernikach cyfrowych umożliwiającym pomiar rezystancji mierzy się najczęściej spadek napięcia na badanym elemencie, spowodowany przepływem prądu ze źródła prądowego wbudowanego do miernika (rys.7).



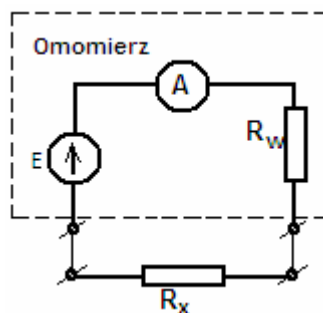
Rys. 7. Zasada pomiaru  $R_x$  omomierzem: cyfrowym.

Zmiana zakresu pomiarowego realizowana jest przez zmianę wartości prądu źródła lub zmianę zakresu woltomierza mierzącego spadek napięcia na oporniku  $R_x$ . Ponieważ wartość prądu, który płynie przez opornik jest znana, woltomierz mierzący spadek napięcia na oporniku  $R_x$  może być wyskalowany w omach. Dla poszczególnych zakresów pomiarowych wartość prądu jest najczęściej zmieniana w stosunku dziesiętnym. Najniższe zakresy pomiarowe wynikają z minimalnych zakresów napięciowych woltomierzy i maksymalnej wartości zastosowanego źródła prądowego. Wartość maksymalna prądu, źródła prądowego wynosi na ogół 1mA lub 10 mA. Górne zakresy pomiarowe ogranicza rezystancja wewnętrzna woltomierza ( $R_x \ll R_v$ ). W typowych wykonaniach multimetrów cyfrowych dolny zakres pomiarowy rezystancji wynosi  $100\Omega$ , a górny 10 (100)M $\Omega$ . W dokładnych omomierzach cyfrowych można często wybrać dwu (rys.7) lub czteroprzewodowy sposób dołączenia rezystora do omomierza. (rys.8). Czteroprzewodowe połączenie rezystora z omomierzem pozwala na eliminację rezystancji przewodów łączących opornik z omomierzem.



Rys. 8 Omierz „czterozaciskowy”

W omomierzach analogowych (rys. 9) najczęściej stosowane jest źródło napięcia stałego; prąd jest funkcją mierzonej rezystancji ( $I=U/R$  podziałka takiego omomierza jest zawsze nieliniowa). Zakresy wartości mierzonych rezystancji są zbliżone do wartości mierzonych omomierzami cyfrowymi, ale wynik pomiaru jest obarczony znacznie większym błędem - zwykle kilkuprocentowym..



Rys.9 Zasada pomiaru  $R_x$  omomierzem analogowym

### Pomiary pośrednie

Metody pośrednie pomiaru rezystancji mogą być stosowane do pomiaru rezystancji elementów o liniowej i nieliniowej charakterystyce  $U = f(I)$ .

Zasada pomiaru pośredniego opiera się na wykorzystaniu prawa Ohma, czyli zależności wiążącej mierzone bezpośrednio wielkości (prąd i napięcie) z szukaną wartością rezystancji  $R$ .

$$R_{ZM} = \frac{U_V}{I_A}$$

Graniczny błąd pomiaru  $\Delta R_{ZM}$  zależy od błędów podstawowych zastosowanych przyrządów pomiarowych. Można wyznaczyć metodą różniczki zupełnej (metoda wyznaczania błędów granicznych w pomiarach pośrednich). Błąd bezwzględny jest opisany następującą funkcją

$$\Delta R_{ZM} = \pm \left( \left| \frac{\Delta U_V}{I_A} \right| + \left| \frac{U_V \cdot \Delta I_A}{I_A^2} \right| \right)$$

a błąd względny

$$\delta R_{ZM} = \pm (\delta U_V + \delta I_A)$$

Jednak wartość rezystancji  $R_{ZM}$ , wyznaczona z bezpośredniego pomiaru prądu  $I_A$  i napięcia  $U_V$ :

$$R_{ZM} = \frac{U_V}{I_A}$$

nie jest równa wartości mierzonej  $R_X$ .

$$R_X = \frac{U_{R_X}}{I_{R_X}}$$

ponieważ albo  $U_V \neq U_{R_X}$  albo  $I_A \neq I_{R_X}$ . Wynik pomiaru  $R_{ZM}$  obarczony jest zatem błędem systematycznym (często nazywanym błędem metody). Jeśli wartość błędu systematycznego nie jest pomijalnie mała w stosunku do błędu granicznego wynikającego z błędów amperomierza i woltomierza, należy wynik pomiaru  $R_{ZM}$  poprawić (usunąć błąd systematyczny).

Są dwie możliwości włączenia amperomierza i woltomierza do pomiaru prądu i napięcia (rys 1 i rys.2).

W układzie jak na rys.1, wskazanie amperomierza  $I_A = I_{R_X}$ . Jest to więc **układ poprawnie mierzonego prądu**. Woltomierz wskazuje sumę napięcia na oporniku ( $U_{R_X}$ ) i napięcia na rezystancji wewnętrznej amperomierza ( $U_A$ ). Poprawną wartość mierzonej rezystancji można obliczyć z zależności:

$$R_X = \frac{U_V - U_A}{I_A} = \frac{U_V}{I_A} - R_A$$

Zatem wynik pomiaru obliczony ze wskazań woltomierza i amperomierza ( $R_{ZM}$ ) obarczony jest błędem systematycznym bezwzględnym  $\Delta R_S$  równym

$$\Delta R_S = R_{ZM} - R_X = R_A$$

a względny błąd metody obliczony z ogólnej zależności:

$$\delta R_S = \frac{R_{ZM} - R_X}{R_X}$$

przyjmuje wartość

$$\delta R_S [\%] = \frac{R_A}{R_X} * 100 \approx \frac{R_A}{R_{ZM}} * 100$$

W układzie jak na rys.2, woltomierz mierzy napięcie bezpośrednio na elemencie mierzonym ( $U_V = U_{R_X}$ ), układ ten nazywany jest **układem poprawnie mierzonego napięcia**. Wskazanie amperomierza jest równe sumie prądu  $I_{R_X}$  płynącego przez opornik i prądu  $I_V$  płynącego przez woltomierz. Poprawną wartość rezystancji mierzonej można obliczyć z zależności:

$$R_X = \frac{U_V}{I_A - I_V}$$

Czyli wynik pomiaru obliczony ze wskazań woltomierza i amperomierza ( $R_{ZM}$ ) obarczony jest bezwzględny błądem systematyczny  $\Delta R_s$

$$\Delta R_s = R_{ZM} - R_x = \frac{R_x * R_V}{R_x + R_V} - R_x = -\frac{R_x^2}{R_x + R_V},$$

Błąd metody w układzie poprawnie mierzonego napięcia wynosi:

$$\delta R_s [\%] = -\frac{R_{ZM}}{R_x} * 100 = -\frac{R_x}{R_x + R_V} * 100 \approx -\frac{R_x}{R_V} * 100.$$

Zależności określające przybliżoną wartość błędu systematycznego

$$\delta R_s \approx \frac{R_A}{R_{ZM}} \qquad \delta R_s \approx -\frac{R_{ZM}}{R_V}$$

można wykorzystać do oszacowania potrzeby poprawienia wyniku pomiaru  $R_{ZM}$  (jeśli  $\delta R_s \ll \delta R_{ZM}$  nie ma potrzeby poprawiania) oraz do wyboru układu pomiarowego - znając rezystancje amperomierza można określić wartość rezystancji, dla której systematyczny błąd metody w obu układach jest taki sam. Rezystancja ta nazywana jest zwyczajowo rezystancją graniczną, a jej wartość określa zależność

$$R_{gr} \approx \sqrt{R_A * R_V},$$

Jeżeli spodziewana wartość rezystancji mierzonej  $R_x$  jest mniejsza od granicznej rezystancji  $R_{gr}$ , to należy zastosować układ poprawnie mierzonego napięcia, w przeciwnym razie układ poprawnie mierzonego prądu.

### **Pomiar pośredni metodą porównania spadków napięć.**

Gdy nie dysponujemy dostatecznie dokładnym amperomierzem, można wartość prądu płynącego przez mierzony element wyznaczyć ze wskazań woltomierza mierzącego spadek napięcia na oporniku wzorcowym - wykonać pomiar metodą porównania spadków napięć na rezystancji mierzonej  $R_x$  i rezystancji wzorcowej  $R_N$  (rys.3). Jeśli rezystancja woltomierza jest znacznie większa od rezystancji wzorcowej i rezystancji mierzonej, można przyjąć wtedy, że prąd płynący przez obie rezystancje jest taki sam i może być wyznaczony jako :

$$I = \frac{U_N}{R_N} = \frac{U_x}{R_x}$$

Stosunek wartości mierzonej rezystancji  $R_x$  do rezystancji wzorcowej  $R_N$  określony jest przez stosunek zmierzonych napięć  $U_x/U_N$ .

### **Pomiary rezystancji przyrządów pomiarowych.**

W pomiarach rezystancji wewnętrznej amperomierza lub woltomierza metodą pośrednią można wykorzystać fakt, iż badany przyrząd jest równocześnie miernikiem prądu lub napięcia, zatem wystarczy tylko jeden dodatkowy przyrząd (rys.4 i rys.6). Układy te zapewniają poprawny pomiar zarówno prądu płynącego przez przyrząd jak i napięcia na przyrządzie, w związku z czym nie występuje tu błąd metody pomiaru. Często prąd pobierany przez woltomierz jest bardzo mały (wynika to z dużej rezystancji woltomierza) i trudno go zmierzyć bezpośrednio. W takiej sytuacji korzystniejsze warunki pomiaru można uzyskać w układzie porównawczym, jak na rys.5. Wartość prądu  $I$  płynącego przez woltomierz i rezystor wzorcowy wyznaczana jest w tym układzie pośrednio, ze spadku napięcia na rezystorze wzorcowym  $R_N$ .

Jeżeli  $E$  jest wartością napięcia zasilającego układ a  $U_V$  wartością napięcia zmierzoną przez woltomierz, to spadek napięcia na rezystorze wzorcowym  $U_{RN}$  równy jest:

$$U_{RN} = E - U_V.$$

Prąd płynący w obwodzie :  $I = I_V$  określa zatem zależność:

$$I_V = \frac{U_{RN}}{R_N} = \frac{U_V}{R_V},$$

z której można wyznaczyć szukaną rezystancję woltomierza  $R_V$  :

$$R_V = \frac{R_N U_V}{E - U_V}$$

Wartość napięcia  $E$  można zmierzyć bezpośrednio woltomierzem ,dla rezystancji wzorcowej  $R_N=0$ . Względny graniczny błąd pomiaru rezystancji woltomierza tą metodą, wyznaczony za pomocą różniczki zupełnej, określa zależność:

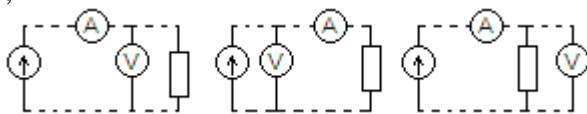
$$\delta R_V = \pm(\delta R_N + \frac{E}{E - U_V}(\delta E + \delta U_V))$$

gdzie:  $\delta R_N$  – graniczny błąd względny rezystancji  $R_N$ ,  
 $\delta E$  - graniczny błąd względny pomiaru  $E$ ,  
 $\delta U_V$  – graniczny błąd względny pomiaru  $U_V$ .

W metodzie tej szczególnie korzystny jest przypadek, gdy regulując wartością rezystora wzorcowego  $R_N$  można uzyskać wartość  $U_V = 0.5E$ . Można wykazać, że w tych warunkach błąd graniczny pomiaru rezystancji woltomierza  $R_V$  jest najmniejszy a wartość tej rezystancji jest taka jak wartość rezystora wzorcowego.

## ZADANIA

- Określić zakres pomiarowy i błąd graniczny pomiaru dla omomierza cyfrowego (rys.7) utworzonego z woltomierza cyfrowego o zakresie 199,9mV, błędzie podstawowym  $\pm(0,1\%+1\text{dgt})$  i źródła prądowego o wartości  $I=1\text{mA}$ ,  $\delta I=\pm 0,1\%$ . Jakie wartości rezystancji można mierzyć tym omomierzem z błędem granicznym nie większym niż 0,5% ?
- Rezystancję, którego elementu można zmierzyć poprawnie typowym omomierzem cyfrowym:
  - liniowego rezystancji około  $0.5\Omega$ ,
  - liniowego o rezystancji około  $5\text{k}\Omega$ ,
  - liniowego o rezystancji około  $500\text{M}\Omega$ ,
  - nieliniowego o rezystancji zmieniającej się w granicach  $500\Omega$  do  $5000\Omega$ .
- Który z schematów układów pomiarowych (rys. 10) należy zastosować do pomiaru rezystancji około  $0,2\Omega$



Rys. 10 Schematy układów pomiarowych. ( linią przerywaną zaznaczono przewody łączące poszczególne elementy układu).

- Rezystancję  $R_x$  zmierzono w układzie poprawnego pomiaru prądu wykorzystując przyrządy analogowe:
  - woltomierz: zakres  $U_z=30\text{ V}$ , rezystancja wewnętrzna  $R_V=1000\Omega/\text{V}$ , klasa  $kl_V=0,5$ ;
  - amperomierz: zakres  $I_z=3\text{mA}$ , spadek napięcia przy pełnym wychyleniu  $U_A=60\text{mV}$ , klasa  $kl_A=0.5$ .
 Podać wynik pomiaru  $R_x \pm \Delta R_x$ , jeżeli woltomierz wskazał  $U=25,0\text{V}$ , a amperomierz  $I=2,50\text{mA}$ .

- Rezystancję  $R_x$  zmierzono w układzie poprawnego pomiaru napięcia za pomocą:
  - woltomierza cyfrowego o zakresie  $U_z=19,99\text{V}$ , błędzie pomiaru  $\Delta U= \pm 0,1\%$  wartości mierzonej  $\pm 1$  cyfra, rezystancji  $R_V=10\text{M}\Omega$

*amperomierza analogowego* o zakresie  $U_z = 1,5\text{mA}$ , klasy  $kl=0,2$  i znamionowym spadku napięcia  $U_A = 60\text{mV}$ .

Jaka jest wartość  $R_X$  mierzonej rezystancji i błąd względny  $\delta R_X$  pomiaru, jeżeli przyrządy wskazywały:  $U = 12,54\text{ V}$  oraz  $I = 1,220\text{mA}$ ?

6. Rezystancje o jakiej wartości należy mierzyć w układzie poprawnego pomiaru prądu jeśli dysponujemy przyrządami jak w zadaniu 4, a jakie jeśli dysponujemy przyrządami jak w zadaniu 5?
7. W układzie przedstawionym na rys.3 zmierzono rezystancję  $R_X$ . Do pomiaru użyto jednego woltomierza cyfrowego o parametrach: zakres  $U_Z = 99,99\text{V}$ , błąd  $\pm 0,05\%$  wartości mierzonej oraz  $\pm 0,01\%$  zakresu. Obliczyć rezystancję  $R_X$  oraz błąd pomiaru  $\delta R_X$ , jeśli napięcie na rezystorze mierzonym wynosiło  $U_X = 15,57\text{V}$ , natomiast na rezystorze wzorcowym zmierzono  $U_N = 15,61\text{V}$ . Dane rezystora wzorcowego:  $R_N = 1000\Omega$ , klasa  $kl_R = 0,01$ . Założyć, że w czasie pomiarów nie zmieniło się napięcie zasilania układu.
8. Rezystancję  $R_X$  z zad. 3 zmierzono powtórnie w układzie jak na rys. 3 zastępując rezystor wzorcowy  $R_N$ , o stałej wartości, rezystorem wzorcowym regulowanym o klasie 0,05. W trakcie pomiaru regulowano wartość rezystora  $R_N$  tak, że dla  $R_N = 997,16\Omega$  pomiary napięć na obu rezystorach dawały równe wskazanie woltomierza:  $U_X = U_N = 15,70\text{V}$ . Obliczyć możliwie najdokładniejszą wartość rezystancji  $R_X$  oraz błąd pomiaru  $\delta R_X$ . Założyć, że w czasie pomiarów nie zmieniło się napięcie zasilania układu.